18.10.2013

מבחן סמסטר אביב תשע"ג

מועד ב'

מד"ר ח' 104131

- ודא שרשמת את מספר הסטודנט בעמוד הראשון.
- זמן המבחן שלוש שעות.
- במבחן זה 8 שאלות, יש לענות על כולן.
- בשאלות 1 ו- 2 יש לנמק היטב ולרשום את התשובות הסופיות בתיבה בסוף כל שאלה.
- בשאלות $3-8$ יש תשובה אחת נכונה. סמן אותה בטבלת התשובות בעמוד הראשון. אין לסמן יותר מתשובה אחת.
- אין להשתמש בכל חומר עזר כולל מחשבונים.
- אין להגיש מחברות עזר, הן לא תבדקנה.

	שאלה 3	שאלה 4	שאלה 5	שאלה 6	שאלה 7	שאלה 8
א						
ב						
ג						
ד						
ה						

שאלה מספר 1: (20%)

12% (א) פתור את המשוואה:

$$x > 0 \ , \qquad x^2y'' - xy' + y = x$$

8% (ב) האם קיים למשוואה שבסעיף (א) פתרון המקיים:

$$y(1) = 3$$

$$y(e) = \frac{7}{2}e$$

אם כן, מצא אותו. אם לא, הסבר מדוע.

(א)

(ב)

שאלה מספר 2: (20%)

12% (א) פתור את המערכת

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8% (ב) מצא פתרון כללי של מערכת המשוואות

$$X' = AX$$

כאשר A מטריצה 5×5 הבאה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

נמק את תשובתך.

(א)

(ב)

שאלה מספר 3: (10%)

נתונה המשוואה

$$y'' + 9y = \cos 3x \qquad \text{אז}$$

א. כל פתרון $y(x)$ של המשוואה מקיים $y(\pi) = y(0) = 0$.

ב. פתרון המשוואה המקיים $y(0) = y'(0) = 0$ מקיים $y(x) \equiv 0$.

ג. קיים פתרון יחיד $y(x)$ של המשוואה המקיים $y(\pi) = y(0) = 0$.

ד. כל פתרון $y(x)$ של המשוואה מקיים $y(\pi) - y(0) = -\frac{\pi}{4}$.

ה. קיימת משפחה חד פרמטרית של פתרונות למשוואה השואפים ל 0 כאשר x שואף ל ∞.

שאלה מספר 4: (10%)

פתרון המשוואה

$$xyy' - y^2 - x^2 e^{-\frac{y}{x}} = 0$$

המקיים $y(1) = 0$ מקיים בעבור איזשהו x_0, $y(x_0) = x_0$.

אזי x_0 שווה ל-

א. 1

ב. e

ג. e^2

ד. $2\ln 2$

ה. $\ln 2$

שאלה מספר 5: (10%)

נתונה המשוואה

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

יהי $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ פתרון המקיים $y(0) = y'(0) = 1$;

אזי $a_4 \cdot a_6$ שווה ל-

א. 0

ב. $\frac{1}{15}$

ג. $\frac{1}{30}$

ד. $\frac{1}{60}$

ה. $\frac{1}{120}$

שאלה מספר 6: (10%)

פתרון בעיית ההתחלה

$$y'' + 2y' + y = u_{2\pi}(t)$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

מקיים

א. $y(2\pi) = 0$

ב. $y(2\pi) = 1$

ג. $y(2\pi) = 2\pi$

ד. $y(2\pi) = 1 - 2\pi$

ה. $y(2\pi) = \frac{1}{2\pi}$

שאלה מספר 7: (10%)

נתונה המשוואה $y' = \dfrac{x^2+3y^2}{2xy}$ אז

א. קיים פתרון יחיד המוגדר בקטע $(0,\infty)$ והמקיים $\lim_{x\to+0} y(x) = 0$.

ב. לא קיים פתרון $y(x)$ ב $(0,\infty)$ המקיים $\lim_{x\to+0} y(x) = 0$.

ג. פתרון $y(x)$ המוגדר ב $(0,\infty)$ המקיים $y(1)=1$ מקיים $\lim_{x\to\frac{1}{2}} y'(x) = \infty$.

ד. פתרון $y(x)$ המוגדר ב $(0,\infty)$ המקיים $y(1)=1$ מקיים $\lim_{x\to+0} y'(x) = -2$.

ה. פתרון $y(x)$ המוגדר ב $(0,\infty)$ המקיים $y(1)=1$ מקיים $\lim_{x\to\frac{1}{2}} y'(x) = 1$.

שאלה מספר 8: (10%)

נתונה משוואה דיפרנציאלית

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

כאשר $p(x)$ ו $q(x)$ רציפות בקטע (a,b). איזה מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

א. קיימת מערכת יסודית של פתרונות $y_1\ ,\ y_2$ המתאפסים באותה נקודה $x_0 \in (a,b)$.

ב. כל פתרון של המשוואה חייב להתאפס בנקודה כלשהי $x_0 \in (a,b)$.

ג. לא יתכן פתרון לא טריוויאלי המתאפס בנקודה $x_0 \in (a,b)$.

ד. שני פתרונות $y_1\ ,\ y_2$ של המשוואה המקיימים $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ בנקודה $x_0 \in (a,b)$ אינם יכולים להיות מערכת יסודית של פתרונות.

ה. אף אחת מהטענות האחרות נכונה.